

# Solução Analítica do Comportamento Estrutural Geometricamente Não Linear da Treliça de Bergan para Algumas Medidas de Deformação

Eduardo N. Lages<sup>1,†</sup>, Gustavo C. S. C. Marques<sup>2</sup>, José Adeildo de Amorim<sup>2</sup>

*Universidade Federal de Alagoas, Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Estrutural, Maceió, Brasil.*

## RESUMO

Neste trabalho, realiza-se um estudo analítico do comportamento estrutural, geometricamente não linear, de uma treliça formada por duas barras simetricamente inclinadas e contraventada na direcção perpendicular ao plano das mesmas por uma mola elástica. Trata-se de um modelo com dois graus de liberdade, apresentando comportamento não linear envolvendo pontos limites, pontos de bifurcação e trajectória de equilíbrio em *snap-through*. Para um determinado padrão de carregamento, analisam-se as trajectórias de equilíbrio primária e secundária, considerando-se as suas estabilidades. É feita uma síntese dos trabalhos anteriormente desenvolvidos sobre esse modelo, verificando-se a influência do emprego de algumas medidas de deformação estabelecidas na literatura científica (de engenharia, de Green e logarítmica). Expressões analíticas desenvolvidas a partir desse modelo podem ser utilizadas no estudo do desempenho de estratégias de controle, para o traçado de trajectórias de equilíbrio não lineares, assim como em estudos comparativos de formulações geometricamente não lineares.

## 1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de soluções analíticas de modelos apresentando poucos graus de liberdade tem sido importante para a aferição de novas formulações não lineares, bem como em testes de desempenho de estratégias de controle para o traçado de trajectórias de equilíbrio não lineares.

Um exemplo clássico desse tipo de modelo consiste na denominada treliça de von Mises (Stricklin et al., 1973; Oden, 1977; Bazant e Cedolin, 1991), cuja solução analítica completa da análise, com expressões para as diferentes configurações de equilíbrio, pode ser encontrada no trabalho de Arcaro e Pulino Filho (2000). Trata-se de um modelo cujas deformações ocorrem no plano formado pelas barras da treliça, apresentando pontos limites e de comportamento do tipo *snap-through*. Pecknold e Ghaboussi (1985) incorporaram a deformabilidade lateral das barras da treliça, podendo dar origem a pontos de bifurcação e trajectórias secundárias de equilíbrio.

Num trabalho apresentado por Bergan (1979), é proposto um novo modelo, onde a treliça base de von Mises é contraventada, na direcção perpendicular ao plano da mesma, por

---

<sup>1</sup> Professor Doutor

<sup>†</sup> Autor para quem a correspondência deverá ser enviada (enl@ctec.ufal.br)

<sup>2</sup> Bolsistas de Iniciação Científica (PIBIC/CNPq)

uma mola. Para essa formulação, admite-se a medida de deformação de engenharia, e que a mola de contraventamento apresenta uma rigidez variável (linear) com a deformação da mesma. Por apresentar uma riqueza de fenômenos de natureza não linear (pontos limites, pontos de bifurcação, etc.), esse modelo tem sido utilizado por diversos autores (Bergan, 1982; Eriksson, 1993; Cardona e Huespe, 1998) no estudo de desempenho de estratégias de controle.

No presente trabalho, amplia-se o modelo da treliça de Bergan, estudando-se a influência do emprego de algumas medidas de deformação – de engenharia, de Green e logarítmica – encontradas na literatura científica (Crisfield, 1991). Admitindo-se um certo padrão de carregamento, são desenvolvidas as expressões analíticas desse modelo.

## 2. DESCRIÇÃO DO MODELO

O modelo estudado consiste numa treliça plana, formada por duas barras inclinadas e contraventada na direção perpendicular ao plano das mesmas, por uma mola elástica (Figura 1). O modelo em questão apresenta dois graus de liberdade, que se referem aos deslocamentos vertical e horizontal da extremidade comum das barras. A extremidade apoiada da mola elástica acompanha verticalmente o deslocamento apresentado pela outra extremidade. Na Figura 1 são esquematizadas as configurações indeformada e deformada do modelo.

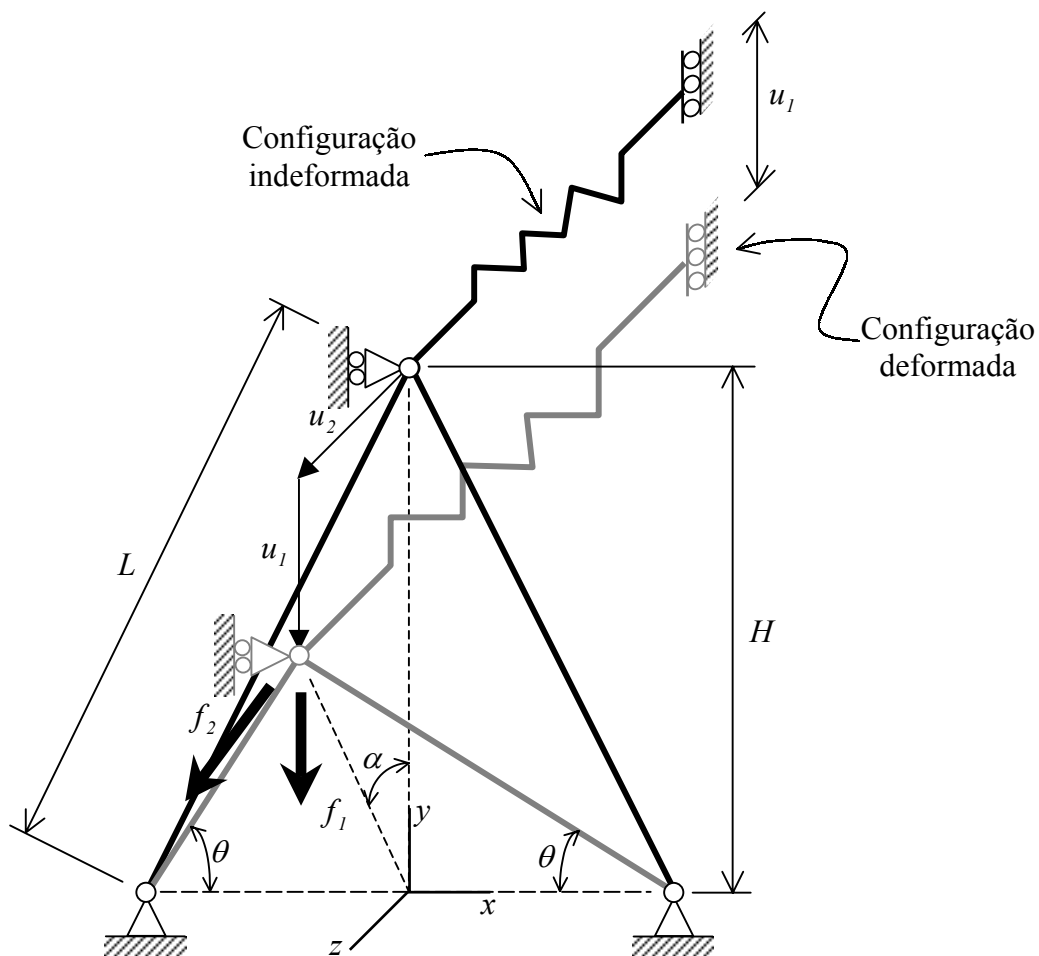


Figura 1 – Esquemática das configurações indeformada e deformada do modelo estudado.

### 3. EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

As equações de equilíbrio do modelo são estabelecidas directamente através da análise das forças externas e internas actuantes no nó deslocável da treliça, ao longo das direcções dos graus de liberdade do modelo ( $u_1$  e  $u_2$ ), chegando-se às seguintes expressões:

$$f_1 + 2N \operatorname{sen} \theta \cos \alpha = 0 \quad (1)$$

$$f_2 - 2N \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \alpha - f_m = 0 \quad (2)$$

em que  $\theta$  é o ângulo, no plano formado pelas barras na configuração deformada, entre cada uma das barras e a direcção horizontal (eixo  $x$ ), e  $\alpha$  é o ângulo entre os planos contendo as barras nas configurações deformada e indeformada. A partir da geometria deformada do modelo, verificam-se as relações

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{(H - u_1)^2 + u_2^2}}{L_f} \quad (3)$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{u_2}{\sqrt{(H - u_1)^2 + u_2^2}} \quad (4)$$

$$\cos \alpha = \frac{H - u_1}{\sqrt{(H - u_1)^2 + u_2^2}} \quad (5)$$

Os parâmetros  $N$ ,  $f_m$  e  $L_f$ , relativos às equações de equilíbrio (1) e (2), são, respectivamente, o esforço normal nas barras da treliça (positivo em tracção), a força elástica na mola de contraventamento (positiva no alongamento) e o comprimento final das barras, dados por

$$N = \sigma A \quad (6)$$

$$f_m = C u_2 \quad (7)$$

$$L_f = \sqrt{(H - u_1)^2 + u_2^2 + L^2 - H^2} \quad (8)$$

onde  $\sigma$ ,  $A$  e  $C$  correspondem, respectivamente, à tensão normal nas barras, à área da secção transversal das barras e à rigidez da mola (constante). Por uma questão de simplicidade, a área da secção transversal das barras da treliça será considerada constante durante todo o processo de deformação.

Substituindo-se os valores das expressões (3), (4) e (5), em conjunto com as equações (6), (7) e (8), nas equações de equilíbrio e admitindo-se ainda uma relação constitutiva linear para o material das barras da treliça, ou seja

$$\sigma = E \varepsilon \quad (9)$$

onde  $E$  e  $\varepsilon$  representam, respectivamente, o módulo de elasticidade longitudinal do material e a medida de deformação das barras, obtêm-se:

$$f_1 = \frac{2EA\varepsilon(u_1 - H)}{L_f} \quad (10)$$

$$f_2 = \frac{2EA\varepsilon u_2}{L_f} + Cu_2 \quad (11)$$

cujos termos à direita das equações correspondem às forças internas do modelo. A medida de deformação  $\varepsilon$ , introduzida nas equações anteriores, será considerada genericamente ao longo de algumas deduções que se seguem, fazendo-se as particularizações quando for desejável.

Rearranjando-se as equações anteriores, no sentido de se estabelecer uma normalização entre os parâmetros de força, geométricos, de rigidez e de deslocamentos da treliça, obtêm-se:

$$\bar{f}_1 = \frac{2\varepsilon(\bar{u}_1 - 1)}{\bar{L}_f} \quad (12)$$

$$\bar{f}_2 = \frac{2\varepsilon\bar{u}_2}{\bar{L}_f} + \eta_2\bar{u}_2 \quad (13)$$

onde  $\bar{f}_i$ ,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  e  $\bar{u}_i$  representam, respectivamente, as normalizações das forças aplicadas ( $f_i/EA$ ), do comprimento inicial das barras inclinadas ( $L/H$ ), da rigidez da mola ( $CH/EA$ ) e dos graus de liberdade do modelo ( $u_i/H$ ). O parâmetro  $\bar{L}_f$  indica a normalização do comprimento final das barras ( $L_f/H$ ), que é dado por

$$\bar{L}_f = \sqrt{(1 - \bar{u}_1)^2 + \bar{u}_2^2 + \eta_1^2} - 1 \quad (14)$$

Além das expressões das forças internas, outra característica intrínseca do modelo que tem importância na análise estrutural é a matriz de rigidez ( $\mathbf{K}$ ). Os seus termos são obtidos através da derivação das componentes das forças internas em relação aos graus de liberdade do modelo. Em virtude das normalizações anteriormente estabelecidas, essa matriz também será apresentada em sua forma normalizada ( $\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{KH}/EA$ ), obtida quando se deriva os termos à direita das equações (12) e (13) em relação aos deslocamentos normalizados  $\bar{u}_1$  e  $\bar{u}_2$ , chegando-se aos seguintes termos:

$$\bar{K}_{11} = \frac{2}{\bar{L}_f} \left\{ (\bar{u}_1 - 1) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}_1} + \varepsilon \left[ 1 - \left( \frac{\bar{u}_1 - 1}{\bar{L}_f} \right)^2 \right] \right\} \quad (15)$$

$$\bar{K}_{12} = \bar{K}_{21} = \frac{2(\bar{u}_1 - 1)}{\bar{L}_f} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}_2} - \frac{\varepsilon \bar{u}_2}{\bar{L}_f^2} \right) \quad (16)$$

$$\bar{K}_{22} = \frac{2}{\bar{L}_f} \left\{ \bar{u}_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}_2} + \varepsilon \left[ 1 - \left( \frac{\bar{u}_2}{\bar{L}_f} \right)^2 \right] \right\} + \eta_2 \quad (17)$$

#### 4. AS MEDIDAS DE DEFORMAÇÃO

De posse das características intrínsecas do modelo (forças internas e matriz de rigidez), é importante estudar a influência do emprego de algumas medidas de deformação encontradas na literatura científica no comportamento mecânico não linear da estrutura. Neste trabalho, analisam-se as medidas de deformação de engenharia, de Green e a logarítmica (Crisfield, 1991).

A medida de deformação de engenharia é dada por

$$\varepsilon = \frac{L_f - L}{L} \quad (18)$$

ou, em função dos parâmetros adimensionais,

$$\varepsilon = \frac{\bar{L}_f - \eta_1}{\eta_1} \quad (19)$$

A partir da equação (19), obtêm-se as expressões das derivadas parciais da deformação com relação aos graus de liberdade normalizados do modelo. São elas:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}_1} = \frac{\bar{u}_1 - 1}{\eta_1 \bar{L}_f} \quad (20)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}_2} = \frac{\bar{u}_2}{\eta_1 \bar{L}_f} \quad (21)$$

Em seguida, apresenta-se a medida de deformação de Green que é dada por

$$\varepsilon = \frac{L_f^2 - L^2}{2L^2} \quad (22)$$

ou, em função dos parâmetros adimensionais,

$$\varepsilon = \frac{\bar{L}_f^2 - \eta_1^2}{2\eta_1^2} \quad (23)$$

A partir da equação (23), obtêm-se as expressões das derivadas parciais da deformação com relação aos graus de liberdade normalizados do modelo, a saber:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}_1} = \frac{\bar{u}_1 - 1}{\eta_1^2} \quad (24)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}_2} = \frac{\bar{u}_2}{\eta_1^2} \quad (25)$$

Por último, tem-se a medida de deformação logarítmica que é dada por

$$\varepsilon = \ln\left(\frac{L_f}{L}\right) \quad (26)$$

ou, em função dos parâmetros adimensionais,

$$\varepsilon = \ln\left(\frac{\bar{L}_f}{\eta_1}\right) \quad (27)$$

A partir da equação (27), obtêm-se as expressões das derivadas parciais da deformação, com relação aos graus de liberdade normalizados do modelo:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}_1} = \frac{\bar{u}_1 - 1}{\bar{L}_f^2} \quad (28)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \bar{u}_2} = \frac{\bar{u}_2}{\bar{L}_f^2} \quad (29)$$

As três medidas de deformação assemelham-se em regime de pequenas deformações, não acontecendo o mesmo em regime de grandes deformações. Esse facto pode ser evidenciado a partir de um estado axial de deformação, cuja relação entre a deformação de engenharia e as demais medidas de deformação é apresentada na Figura 2.

Para o modelo em questão, a magnitude das deformações nas barras está relacionada com o grau de verticalidade da treliça. Assim sendo, à medida que o parâmetro geométrico  $\eta_1$  se aproxima do valor unitário, serão maiores as diferenças entre as trajectórias geradas por cada medida de deformação. É importante observar que as trajectórias de equilíbrio relacionam grandezas globais do modelo (forças e deslocamentos). As diferenças entre as respostas, anteriormente mencionadas, devem-se ao facto de se assumir a mesma relação constitutiva para as três medidas de deformação. Para que o mapeamento da trajectória de equilíbrio seja o mesmo, independentemente da medida de deformação adoptada, deve-se definir relações constitutivas que corrijam as diferenças entre as mesmas, chegando-se, inclusivamente, a relações constitutivas não lineares. Nesse sentido, encontra-se uma discussão pertinente no trabalho de Yang e Leu (1991).

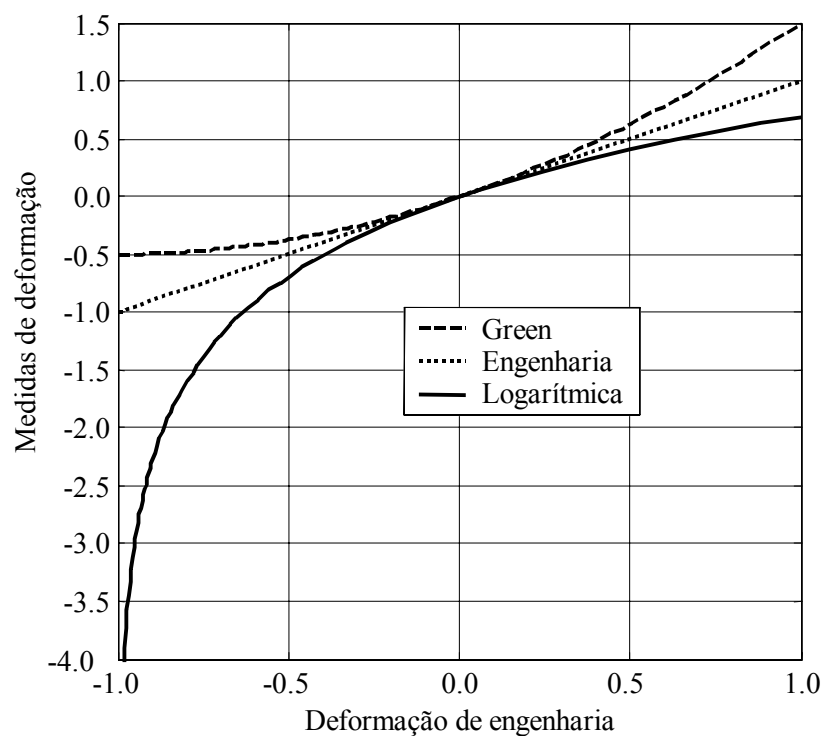


Figura 2 – Relação entre as medidas de deformação.

## 5. ANÁLISE DO EQUILÍBRIO

Nesta fase, fixa-se um padrão de carregamento actuante apenas no grau de liberdade vertical ( $\bar{f}_1 = \lambda$  e  $\bar{f}_2 = 0$ ). Para essa situação, estudam-se as trajectórias de equilíbrio primária (TP) e secundária (TS) do modelo (Figura 3).

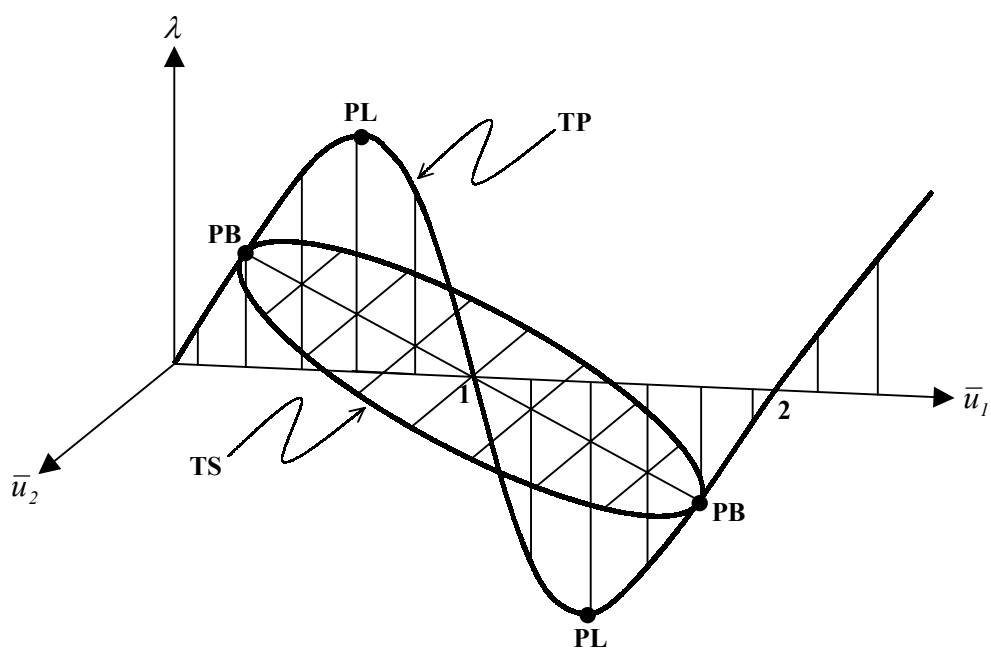


Figura 3 – Representação esquemática das trajectórias de equilíbrio do modelo.

A primeira dessas trajectórias representa configurações de equilíbrio com deformações apenas das barras da treliça, sobre o plano originalmente definido pelas mesmas. O traçado da trajectória primária de equilíbrio pode ser feito a partir da primeira equação de equilíbrio (12), admitindo-se que  $\bar{u}_2$  é nulo, variando-se o deslocamento normalizado  $\bar{u}_1$  dentro de um intervalo específico de investigação. Ao longo dessa trajectória, além da configuração indeformada, duas outras configurações de equilíbrio apresentam parâmetro de carga nulo. Uma delas corresponde à posição horizontal das barras da treliça ( $\bar{u}_1 = 1$ ), e a outra é definida pelo espelhamento da configuração original ( $\bar{u}_1 = 2$ ). A depender do grau de verticalidade da treliça ( $\eta_1$ ) e da relação de rigidez da mola e das barras ( $\eta_2$ ), surgem outras possibilidades de configurações de equilíbrio, definindo a trajectória secundária, que apresentam deslocamentos para os dois graus de liberdade do modelo.

Ao longo dessas trajectórias ficam caracterizados os denominados pontos críticos, que podem ser pontos limites (PL) ou de bifurcação (PB). Esses pontos são determinados quando se estuda a estabilidade do equilíbrio do modelo. Para tal, um dos critérios existentes consiste em se fazer uma análise espectral da matriz de rigidez tangente ao longo da trajectória de equilíbrio, possibilitando o levantamento das energias (autovalores) e dos correspondentes modos (autovectores) incrementais de deformação do modelo (Pecknold et al., 1985). Quando todos os autovalores da matriz de rigidez são positivos, o equilíbrio é dito estável. A existência de pelo menos um autovalor nulo identifica um ponto crítico. A definição se esse é ponto de bifurcação ou limite, depende da ortogonalidade ou não, respectivamente, entre o vector padrão de carregamento e o autovector associado ao ponto crítico. Quando pelo menos um dos autovalores é negativo, o equilíbrio é dito instável.

Para o modelo em questão, ao longo da trajectória de equilíbrio primária, facilmente se verifica que a matriz de rigidez é diagonal, sendo os seus elementos os próprios autovalores. Esses elementos, em sequência, correspondem a energias associadas a modos de deformação no plano da treliça e perpendicularmente ao mesmo.

Assim sendo, tendo por objectivo determinar os deslocamentos normalizados correspondentes aos pontos limite e de bifurcação, impõe-se que os autovalores da matriz de rigidez tangente sejam nulos. Portanto, substituindo as expressões correspondentes a cada medida de deformação, com  $\bar{u}_2 = 0$ , nos autovalores da matriz de rigidez tangente, e explicitando o deslocamento normalizado  $\bar{u}_1$ , chega-se às expressões organizadas nas Tabelas 1 e 2.

Tabela 1 – Deslocamentos normalizados correspondentes aos pontos limites.

Medida de Deformação	Deslocamento Normalizado
Engenharia	$1 \pm \sqrt{1 - \eta_1^2 + [\eta_1^2(\eta_1^2 - 1)]^{2/3}}$
Green	$1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{3(1 - \eta_1^2) + \sqrt{(\eta_1^2 - 1)(9\eta_1^2 - 1)}}$
Logarítmica	$1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1 - \eta_1^2) \left[ 4 - 2 \text{Lambert}W \left( \frac{2\eta_1^2 e^2}{\eta_1^2 - 1} \right) \right]}$

Na dedução das expressões apresentadas nas Tabelas 1 e 2, assim como nas 3 e 4, fez-se uso do programa computacional *Maple* (Kamerich, 1999). As expressões dos pontos limite



e de bifurcação, para a medida de deformação logarítmica, envolvem a função  $W$  de Lambert (Corless et al., 1996). Essa satisfaz a seguinte equação:

$$\text{Lambert}W(x) \cdot e^{\text{Lambert}W(x)} = x \quad (30)$$

Tabela 2 – Deslocamentos normalizados correspondentes aos pontos de bifurcação.

Medida de Deformação	Deslocamento Normalizado
Engenharia	$1 \pm \sqrt{1 - \eta_1^2 + \frac{4\eta_1^2}{(2 + \eta_1\eta_2)^2}}$
Green	$1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2 + \eta_1^3\eta_2 (\eta_1\eta_2 - \sqrt{\eta_1^2\eta_2^2 + 4})}$
Logarítmica	$1 \pm \sqrt{1 - \eta_1^2 + \frac{4}{\eta_2^2} \text{Lambert}W(\eta_1\eta_2/2)^2}$

As expressões dos deslocamentos normalizados correspondentes aos pontos limites dependem apenas do grau de verticalidade da treliça, através do parâmetro  $\eta_1$ , não havendo influência do parâmetro  $\eta_2$ , uma vez que ao longo da trajectória primária não há mobilização da mola de contraventamento. A existência dos pontos de bifurcação vai depender de relações entre esses dois parâmetros do modelo. Fixado um valor para o parâmetro  $\eta_1$ , existirá um limite superior para o parâmetro  $\eta_2$ , de tal forma que possibilite a existência da trajectória secundária. A determinação desses limites superiores é feita estudando-se os argumentos das raízes presentes nas expressões dos pontos de bifurcação. Na Tabela 3, definem-se esses valores limites para cada uma das medidas de deformação.

Tabela 3 – Limites superiores de  $\eta_2$  para a existência da trajectória secundária de equilíbrio.

Medida de Deformação	Limite superior do parâmetro $\eta_2$
Engenharia	$2 \left( \frac{1}{\sqrt{\eta_1^2 - 1}} - \frac{1}{\eta_1} \right)$
Green	$\frac{1}{\eta_1^2 \sqrt{\eta_1^2 - 1}}$
Logarítmica	$\frac{2}{\sqrt{\eta_1^2 - 1}} \ln \left( \frac{\eta_1}{\sqrt{\eta_1^2 - 1}} \right)$

Um outro valor de particular interesse do parâmetro adimensional de rigidez  $\eta_2$  é aquele em que os pontos limite e de bifurcação ocorrem para o mesmo deslocamento normalizado. Forçando a igualdade das expressões apresentadas nas Tabelas 1 e 2, e explicitando o parâmetro  $\eta_2$ , obtêm-se os valores representados na Tabela 4 para as três medidas de deformação aqui consideradas.

Tabela 4 – Valores de  $\eta_2$  para coincidência dos pontos limite e de bifurcação.

Medida de Deformação	Valor do parâmetro $\eta_2$
Engenharia	$\frac{2}{[\eta_1(\eta_1^2 - 1)]^{1/3}} - \frac{2}{\eta_1}$
Green	$\frac{\sqrt{(1 - \eta_1^2)(9\eta_1^2 + 1) + (3\eta_1^2 - 1)\sqrt{(\eta_1^2 - 1)(9\eta_1^2 - 1)}}}{2\eta_1^2 \sqrt{\eta_1^2 - 1}}$
Logarítmica	$\sqrt{\frac{2}{LambertW\left(\frac{2\eta_1^2 e^2}{\eta_1^2 - 1}\right)(\eta_1^2 - 1)}} \ln \left( \frac{2\eta_1^2}{LambertW\left(\frac{2\eta_1^2 e^2}{\eta_1^2 - 1}\right)(\eta_1^2 - 1)} \right)$

Como um critério de projecto para o sistema de contraventamento, a adopção de uma rigidez normalizada definida pelas expressões da Tabela 4 otimiza a relação entre a rigidez desse sistema e a capacidade de carga da treliça, não antecipando a existência de um ponto crítico de bifurcação, caso se adote um valor menor para a rigidez, ou um superdimensionamento do sistema, no caso contrário.

Investiga-se, em seguida, a forma da trajectória secundária de equilíbrio. A partir da segunda equação de equilíbrio (13), admitindo-se que  $\bar{f}_2$  é nula, chega-se a uma expressão que mapeia a trajectória secundária de equilíbrio, projectada no plano  $\bar{u}_1 \bar{u}_2$ , dada por:

$$\frac{2\varepsilon}{L_f} = -\eta_2 \quad (31)$$

Fazendo-se as devidas substituições referentes a cada medida de deformação, conclui-se que

$$(\bar{u}_1 - 1)^2 + \bar{u}_2^2 = (1 - \bar{u}_{PB})^2 \quad (32)$$

onde  $\bar{u}_{PB}$  representa o deslocamento normalizado  $\bar{u}_1$  correspondente ao ponto de bifurcação, avaliado a partir das expressões relacionadas na Tabela 2. Portanto, a projecção da trajectória secundária de equilíbrio é dada por uma circunferência centrada em  $\bar{u}_1 = 1$  e  $\bar{u}_2 = 0$ , cujo raio é igual a  $(1 - \bar{u}_{PB})$ . Fixando-se um valor para o parâmetro  $\eta_1$ , o raio dessa circunferência será maior, à medida que temos valores menores do parâmetro  $\eta_2$ .

Visando-se caracterizar univocamente a trajectória secundária de equilíbrio, substitui-se a Equação (31) na primeira equação de equilíbrio (12), de onde se tem que

$$\lambda = \eta_2(1 - \bar{u}_1) \quad (33)$$

para qualquer uma das medidas de deformação consideradas neste trabalho. Assim sendo, a projecção da trajectória secundária de equilíbrio no plano  $\bar{u}_1 \lambda$  é dada por um segmento de recta de inclinação  $(-\eta_2)$ .

A simetria da trajectória secundária de equilíbrio em relação ao plano  $\bar{u}_1\lambda$ , deve-se à escolha da medida de deformação de engenharia, utilizada para a mola de contraventamento, pois essa comporta-se simetricamente à tracção e à compressão, o que não ocorreria com as outras duas medidas de deformação abordadas neste trabalho (ver Figura 2).

## 6. CONCLUSÕES

Este artigo apresenta a solução analítica completa de um modelo simples de treliça de comportamento geometricamente não linear, que implica numa variedade de fenómenos não lineares. A partir das expressões analíticas encontradas para o vector de forças internas e para a matriz de rigidez tangente, essas poderão servir de base para futuras comparações de formulações, bem como para testes de desempenho, para estratégias de controle para o traçado de trajectórias de equilíbrio não lineares.

Um melhoramento na formulação do modelo já se encontra em investigação, possibilitando a ocorrência de bifurcações assimétricas.

Ressalta-se a facilidade de desenvolvimento de soluções analíticas permitidas através da utilização de programas computacionais de matemática simbólica, como por exemplo o *Maple* que foi explorado neste trabalho.

## 7. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), agência de fomento do governo brasileiro, pelo apoio ao projecto de pesquisa que resultou neste trabalho, através da concessão de bolsas de iniciação científica aos dois últimos autores.

## 8. REFERÊNCIAS

Arcaro, V.F. e Pulino Filho, A.R., Solução Analítica Completa da Análise Não Linear de uma Treliça Plana de Duas Barras, em: *Anais da XXIX Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructural* (em CD), Punta Del Este, Uruguay (2000).

Bazant, Z.P. e L. Cedolin, *Stability of Structures – Elastic, Inelastic, Fracture, and Damage Theories*, Oxford University Press, New York (1991).

Bergan, P.G., Solution Algorithms for Nonlinear Structural Problems, em: *Proceedings of the International Conference on Engineering Application of the Finite Element Method*, Oslo, 13.1-13.38 (1979).

Bergan, P.G., Automated Incremental-Iterative Solution Methods in Structural Mechanics, em: *Recent Advances in Non-Linear Computational Mechanics*, Edit. E. Hinton, D.R.J. Owen e C. Taylor, Pineridge Press, Swansea, U.K., 41-62 (1982).

Cardona, A. e Huespe, A., Continuation Methods for Tracing the Equilibrium Path in Flexible Mechanism Analysis, *Engineering Computations*, 15(2), 190-220 (1998).

Corless, R.M., Gonnet, G.H., Hare, D.E.G., Jeffrey, D.J. e Knuth, D.E., On the Lambert W Function, *Advances in Computational Mathematics*, 5, 329-359 (1996).

Crisfield, M.A., *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures – Volume 1: Essentials*, John Wiley & Sons, Chichester (1991).

Eriksson, A., On Improved Predictions for Structural Equilibrium Path Evaluations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36, 201-220 (1993).

Kamerich, E., *A Guide to Maple*, Springer-Verlag Inc., New York (1999).

Oden, J.T., *Finite Element Approximations in Nonlinear Elasticity*, Lectures on Finite Element Methods in Continuum Mechanics, U. Alabama (Huntsville) Press (1977).

Pecknold, D.A., Ghaboussi, J. e Healey, T.J., Snap-Through and Bifurcation in a Simple Structure, *Journal of Engineering Mechanics*, 111(7), 909-922 (1985).

Stricklin, J.A., Haisler, W.E. e von Riesenmann, W., Evaluation of Solution Procedures for Material and for Geometrically Nonlinear Structural Analysis, *AIAA Journal*, 11, 292-299 (1973).

Yang, Y.B. e Leu, L.J., Constitutive Laws and Force Recovery Procedures in Nonlinear Analysis of Trusses, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 92, 121-131 (1991).