

Um modelo de otimização para a determinação da curva de umidade para a secagem de corpos de prova cilíndricos de concreto

Pedro H. R. Silveira¹, Eduardo N. Lages²

Universidade Federal de Alagoas, Centro de Tecnologia, Laboratório de Computação Científica e Visualização, Tabuleiro do Martins s/n, CEP 57072-970, Maceió/AL, Brasil.

RESUMO

A fissuração por retração em peças em processo de secagem é um problema recorrente no uso do concreto. Tal fenômeno motivou o surgimento de diversos métodos de controle de umidade para o material, notadamente em corpos de prova. Neste trabalho, determina-se o histórico de prescrição da umidade ambiente para a secagem ótima de corpos de prova cilíndricos de concreto. Objetiva-se limitar o gradiente espacial de umidade ao longo do corpo de prova durante o processo de secagem. Assume-se que tal gradiente tem forte correlação com a fissuração provocada pela retração de peças em processo de ganho de resistência. A difusão de umidade no concreto é modelada com base na Segunda Lei de Fick, discretizada espacialmente através do Método das Diferenças Finitas e integrada numericamente no domínio do tempo com o *solver ode15s* no ambiente MATLAB®. São apresentados detalhes da implementação computacional, bem como resultados de experimentações numéricas para diferentes tamanhos de corpo de prova e gradientes limite.

1. INTRODUÇÃO

O concreto, quando submetido a uma condição de umidade externa inferior à sua própria, perde água em sua superfície por evaporação, gerando um fluxo interno em direção à mesma. Essa perda de umidade, causada pela evaporação superficial, é aceita como sendo um dos principais causadores da retração de peças de concreto quando em secagem (Abbasnia et al., 2009; Bažant e Xi, 1994; Jafarifar et al., 2014).

A retração desigual das peças de concreto, provocada pela secagem não homogênea, pode manifestar-se na forma de tensões de tração elevadas. Uma vez que o concreto é um material mecanicamente frágil e de baixa tenacidade quando em tração, essa retração desigual não é bem absorvida, especialmente quando o material ainda está em fase inicial de ganho de resistência, resultando em fissuras que, por sua vez, reduzem a resistência das peças (Bažant e Xi, 1994; Mehta e Monteiro, 2013; Jafarifar et al., 2014).

De modo a evitar a fissuração por retração, os corpos de prova de concreto são mantidos em ambientes de umidade controlada, a exemplo de câmaras úmidas e de tanques com água saturada com cal (Figura 1), durante o processo de ganho de resistência. Este

¹ Acadêmico do Curso de Engenharia Civil

² Professor Associado (enl@lccv.ufal.br)

procedimento é conhecido como ‘cura’, sendo os corpos de prova retirados, apenas, para a realização dos ensaios desejados, ou após um período de tempo definido previamente (ABNT NBR 5738, 2003).



Figura 1 – Controle de umidade por meio de (a) câmara úmida e (b) tanque com água saturada com cal.

O problema da retração provocada pela secagem do concreto foi abordado por diversos autores. Para citar alguns, destacam-se os trabalhos de Bažant (1975), Asad et al. (1995), Benboudjema et al. (2005), Abbasnia et al. (2009), Ali e Urgessa (2014), Jafarifar et al. (2014) e Khorsandnia et al. (2015), bases para este artigo. Neles, a modelagem do processo de difusão de umidade através da microestrutura porosa do concreto tem como princípio matemático diferentes versões das Leis de Fick, fato esse explicitamente mencionado por Jafarifar et al. (2014), que faz ainda breves citações sobre o histórico da utilização deste modelo. Experimentos realizados por esses autores, ou comparações feitas entre os modelos por eles utilizados e valores encontrados na literatura, mostraram-se bastante satisfatórios em termos de concordância.

Tal equação também foi utilizada com sucesso para a modelagem de materiais de microestrutura porosa semelhante ao concreto, a exemplo do trabalho de Castellazzi et al. (2015), que a aplica à difusão de umidade em blocos de alvenaria, mencionando também o processo de fissuração pelo aparecimento de tensões diferenciais quando em secagem.

Neste trabalho, utiliza-se o formato da equação como apresentado por Asad et al. (1995), Ali e Urgessa (2014) e Khorsandnia et al. (2015), sendo a mesma semelhante à equação de Fourier para a difusão de calor, porém com significativas diferenças nos valores dos coeficientes, fato também citado por Jafarifar et al. (2014). Os valores assumidos para estes coeficientes são aqueles apresentados por Asad et al. (1995), considerados constantes durante o processo de secagem.

Benboudjema et al. (2005) e Ali e Urgessa (2014) consideram ainda a relação entre a perda de umidade e a retração no concreto como linear. Benboudjema et al. (2005), contudo, limita tal linearidade para umidades entre 50 e 100%, atribuindo as não linearidades existentes principalmente ao processo de fissuração, relação direta esta considerada no presente artigo, onde a modelagem é feita dentro da faixa de umidade sugerida.

Com base em tais considerações para a modelagem do processo difusivo definidas pela revisão bibliográfica realizada, este trabalho visa definir históricos ótimos de umidade ambiente para a secagem gradual de corpos de prova cilíndricos de concreto, de modo a permitir que os mesmos possam ser colocados, no menor tempo possível, em ambientes com condições de umidade preestabelecidas para futuros ensaios, ou mesmo serem ensaiados, tão cedo quanto possível, em condições de umidade determinadas, permitindo testes em espécimes mais jovens e em diferentes condições de saturação. Tal controle tem em vista o

fato de que propriedades como a idade do corpo de prova e suas condições de umidade e fissuração, entre outras, têm correlação direta com a resistência do mesmo (Mehta e Monteiro, 2013).

2. EQUAÇÕES GOVERNANTES

Assumindo-se que difusão de umidade no concreto respeita a Segunda Lei de Fick, tem-se, de forma generalizada,

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot [\mathbf{D}(\phi, \mathbf{r}, t) \nabla \phi(\mathbf{r}, t)] \quad (1)$$

onde ϕ é a umidade interna no domínio analisado, função do vetor posição \mathbf{r} e do tempo t ; ∇ é o operador diferencial vetorial nabla, sendo $\nabla \cdot$ o divergente; $\mathbf{D}(\phi, \mathbf{r}, t)$ é, em um caso geral, a matriz de difusividade, dependentes de \mathbf{r} , t e de ϕ ; e $\nabla \phi$ é o vetor gradiente de umidade.

Neste estudo, assume-se que o meio é isotrópico, sendo a matriz de difusividade diagonal, e que seus coeficientes são iguais. Assume-se, ainda, que esses coeficientes são constantes, não variando com a umidade, o tempo ou a posição, o que resulta em

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D \nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) \quad (2)$$

onde D é o coeficiente de difusão do material e ∇^2 é o operador de Laplace, oriundo da aplicação do divergente sobre o gradiente. Em oposição à eq. (1), esta equação diferencial parcial é linear. Tal formato é o que consta no trabalho de Asad et al. (1995).

Expandindo-se o operador de Laplace em um sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , e assumindo-se, ainda, que os corpos de prova são isolados nas faces planas (topo e base), bem como que as umidades do ambiente e de sua superfície são constantes ao longo das direções axial e angular, ou seja, que ϕ é axissimétrica com relação ao eixo central do corpo de prova, tem-se a simplificação

$$\frac{\partial \phi(r, t)}{\partial t} = D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \phi(r, t)}{\partial r} \right] \quad (3)$$

que, ao se expandir a derivada externa à direita da igualdade pela regra do produto, resulta em

$$\frac{\partial \phi(r, t)}{\partial t} = D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \phi(r, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi(r, t)}{\partial r^2} \right] \quad (4)$$

que corresponde a uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem, homogênea e de coeficientes variáveis, tendo como incógnita o campo de umidades ϕ , dependente da coordenada espacial radial r e do tempo t , cujo desenvolvimento de soluções específicas para problemas de interesse depende da definição de condições iniciais de umidade e de contorno envolvendo prescrições de umidade e/ou fluxo de umidade ao longo do tempo.

Neste estudo, considera-se a condição inicial de umidade constante para todo o corpo de prova, ou seja,

$$\phi(r, 0) = \bar{\phi}_0 \quad (5)$$

onde $\bar{\phi}_0$ é a umidade constante do corpo de prova no instante $t = 0$.

Como primeira condição de contorno, tem-se a evaporação da umidade na superfície externa do corpo de prova ($r = R$), assumida como

$$-D \frac{\partial \phi(R, t)}{\partial r} = K [\phi(R, t) - \bar{\phi}_a(t)] \quad (6)$$

onde a parcela à esquerda representa o fluxo de umidade, considerado positivo quando coincidente com o sentido de crescimento da ordenada espacial r , e $\bar{\phi}_a(t)$ é a umidade ambiente em função do tempo, sendo K uma constante de evaporação (Asad et al., 1995).

A segunda condição de contorno resulta da axissimetria do problema, que impõe fluxo de umidade nulo em $r = 0$, ou seja,

$$-D \frac{\partial \phi(0, t)}{\partial r} = 0 \quad (7)$$

3. MODELO DE OTIMIZAÇÃO

Inicialmente, assume-se que a fissuração é causada por gradientes de umidade elevados dentro do concreto, gerando retrações diferenciais no mesmo. Tal gradiente é então limitado e prescrito como condição de contorno na Segunda Lei de Fick, discretizada espacialmente através do Método das Diferenças Finitas (e.g., Causon e Minghan, 2010) e resolvida computacionalmente no ambiente MATLAB® através do algoritmo de integração temporal *ode15s*. O histórico de umidades ambiente resultante deste processo é assumido como sendo a curva ótima para a cura dos corpos de prova.

O problema de otimização proposto neste trabalho, então, consiste em descobrir a curva do histórico de umidade ambiente $\bar{\phi}_a(t)$, com um valor final predefinido a ser atingido no menor tempo possível, apresentando-se, como restrição, um valor limite para o gradiente espacial de umidade no corpo de prova, ou seja,

$$\left| \frac{\partial \phi(r, t)}{\partial r} \right| \leq \frac{\bar{\partial \phi}}{\partial r} \quad (8)$$

onde $|\partial \phi(r, t)/\partial r|$ é o módulo do gradiente espacial de umidade para os pontos materiais do corpo de prova em qualquer instante de tempo t e $\bar{\partial \phi}/\partial r$ é um gradiente limite prescrito (positivo).

Busca-se um histórico de umidade ambiente não crescente. Com isso o gradiente máximo de umidade no corpo de prova ocorre sempre na superfície externa do mesmo, o que permite reescrever a condição de restrição dada pela eq. (8), de maneira reduzida, como

$$\left| \frac{\partial \phi(R, t)}{\partial r} \right| \leq \frac{\bar{\partial \phi}}{\partial r} \quad (9)$$

Com este confinamento do gradiente espacial de umidade máximo à superfície do corpo de prova, pode-se prescrever o gradiente limite definido como condição de contorno de evaporação para todos os instantes de tempo. Desta forma, estar-se-á prescrevendo a maior retirada de umidade possível no corpo de prova, sem violar a restrição imposta quanto ao

gradiente, em todos os instantes de tempo. Assume-se tal prescrição como ótima, visto que a mesma acarreta no maior volume possível de umidade retirado do corpo de prova por instante de tempo.

Nesta configuração, o histórico de umidade ambiente é determinado posteriormente, a partir de informações da umidade na superfície do corpo de prova. Formalmente, partindo-se da eq. (6) e impondo-se o gradiente máximo prescrito, tem-se

$$-D \frac{\partial \phi(R, t)}{\partial r} = D \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} = K[\phi(R, t) - \bar{\phi}_a(t)] \quad (10)$$

ou seja, prescreve-se o gradiente de umidade limite como condição de contorno no lugar da umidade ambiente. Tal umidade é então definida, ao fim do processo, fazendo-se uso do gradiente prescrito e do histórico de umidade em $r = R$.

4. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Aproximam-se, inicialmente, por meio de diferenças finitas centrais de grade uniforme com n subdivisões de espaçamento Δr , para as quais se emprega uma interpolação quadrática do campo de umidades, as derivadas espaciais de primeira e segunda ordens presentes na eq. (4), chegando-se a

$$\frac{\partial \phi(r_i, t)}{\partial t} = D \left[\frac{1}{r_i} \frac{\phi_{i+1}(t) - \phi_{i-1}(t)}{2 \Delta r} + \frac{\phi_{i+1}(t) - 2 \phi_i(t) + \phi_{i-1}(t)}{\Delta r^2} \right] \quad (11)$$

onde i é o indexador referente ao domínio espacial, avaliado para $1 < i < n + 1$. Desta forma, tem-se um sistema de equações diferenciais ordinárias do tipo

$$\frac{\partial \phi(r_i, t)}{\partial t} = f_i(\boldsymbol{\phi}(t)) \quad (12)$$

onde $\boldsymbol{\phi}(t)$ é o vetor das umidades nos pontos da grade para um instante de tempo qualquer t .

Para a imposição da condição inicial, tem-se, partindo da eq. (5),

$$\phi_i(0) = \bar{\phi}_0 \quad (13)$$

neste caso para $1 \leq i \leq n + 1$.

A eq. (11) é montada para todos os pontos internos da grade do Método das Diferenças Finitas, tal como se apresenta na eq. (12), que é argumento de entrada para a função *ode15s*, parte do pacote de equações diferenciais do MATLAB® (Shampine e Reichelt, 1997), para os sucessivos instantes de tempo, partindo-se da condição de umidade inicial definida pela eq. (13). Com isso, usando-se informações do instante t , determinam-se os valores do campo de umidades em $t + \Delta t$ para os pontos internos da grade de discretização. No caso da função *ode15s*, o incremento de tempo Δt é variável, e ajustado automaticamente durante o processo de integração.

Para os pontos inicial e final da grade de discretização, onde $i = 1$ e $i = n + 1$, respectivamente, são usadas as condições de contorno definidas, respectivamente, pelas eqs. (7) e (10). A primeira dessas equações pode ser escrita através de uma aproximação da derivada espacial presente por uma diferença avançada, para a qual também se emprega uma interpolação quadrática do campo de umidade, como

$$-D \frac{-3 \phi_1(t) + 4 \phi_2(t) - \phi_3(t)}{2 \Delta r} = 0 \quad (14)$$

o que leva a

$$\phi_1(t) = \frac{1}{3} [4 \phi_2(t) - \phi_3(t)] \quad (15)$$

A eq. (10), por sua vez, pode ser escrita através de uma aproximação da derivada espacial presente por uma diferença atrasada, mantendo-se uma interpolação quadrática do campo de umidade, como

$$-D \frac{\phi_{n-1}(t) - 4 \phi_n(t) + 3 \phi_{n+1}(t)}{2 \Delta r} = D \frac{\bar{\partial} \phi}{\partial r} \quad (16)$$

resultando em

$$\phi_{n+1}(t) = \frac{1}{3} \left[-2 \Delta r \frac{\bar{\partial} \phi}{\partial r} - \phi_{n-1}(t) + 4 \phi_n(t) \right] \quad (17)$$

Desta forma, determinam-se, com base nas informações do instante anterior, os valores das umidades no instante seguinte para todo o domínio espacial.

Uma vez definidos os valores da umidade na superfície ao longo do tempo, restaura-se o histórico de umidade ambiente fazendo-se uso da segunda igualdade da eq. (10), reescrita como

$$\bar{\phi}_a(t) = \phi_{n+1}(t) - \frac{D \bar{\partial} \phi}{K \partial r} \quad (18)$$

De acordo com a eq. (18), quando maior for a constante de evaporação K , mais próximas são as umidades na superfície externa do corpo de prova e no ambiente para cada instante t .

Procede-se a integração temporal até que uma condição de parada seja satisfeita. Neste trabalho, interrompe-se o processo de integração no instante em que a umidade ambiente atinge um valor final prescrito, ou seja,

$$\phi_a(t_{cc}) = \bar{\phi}_f \quad (19)$$

onde t_{cc} é denominado tempo de cura controlada, que se deseja minimizar. No ambiente MATLAB®, a interrupção condicional do processo de integração temporal via *ode15s* é feita através da definição da propriedade *events* desta função.

Os arquivos MATLAB® correspondentes às funções com as implementações do modelo de otimização desenvolvido neste trabalho, bem como os exemplos numéricos apresentados adiante, encontram-se disponíveis no repositório <http://loi.lccv.ufal.br/art-duc> para *download* e uso. Busca-se, com isso, seguir os preceitos da pesquisa reproduzível, do inglês *reproducible research* (e.g., Vandewalle et al., 2009).

5. APLICAÇÃO NUMÉRICA

Para os exemplos numéricos tratados neste trabalho, usam-se valores de 10 cm e de 15 cm para o diâmetro dos corpos de prova (ou 5 cm e 7,5 cm para os raios). Tais valores são referências para os corpos de prova normalmente ensaiados no Brasil (ABNT NBR 5738, 2003).

Na construção da grade de discretização espacial do Método das Diferenças Finitas, adota-se um espaçamento $\overline{\Delta r} = 1 \text{ mm}$ em ambos os diâmetros.

Para o coeficiente de difusão D e para a constante de evaporação K , por sua vez, usam-se os valores de, respectivamente, $0,35 \text{ cm}^2/\text{dia}$ e $0,25$, tomando-se como referência o trabalho de Assad et al. (1995), como citado.

A umidade inicial considerada para os corpos de prova é de 1,0 (100%). Quanto à umidade final prescrita, assume-se o valor de 0,5 (50%). Tal consideração baseia-se em estudos de Bažant (1975), onde se demonstra que a maior parte da retração acontece entre tais umidades, bem como na consideração de Benboudjema et al. (2005) a respeito da linearidade da relação entre a retração e a perda de umidade para valores da última dentro da faixa prescrita.

Adotam-se valores de $1/6$, $1/8$ e $1/10 \text{ cm}^{-1}$ para os gradientes de umidade limite ($\overline{\partial\phi/\partial r}$).

A Figura 2 apresenta os históricos ótimos de umidade ambiente encontrados para os corpos de prova com os raios de 5 cm e 7,5 cm.

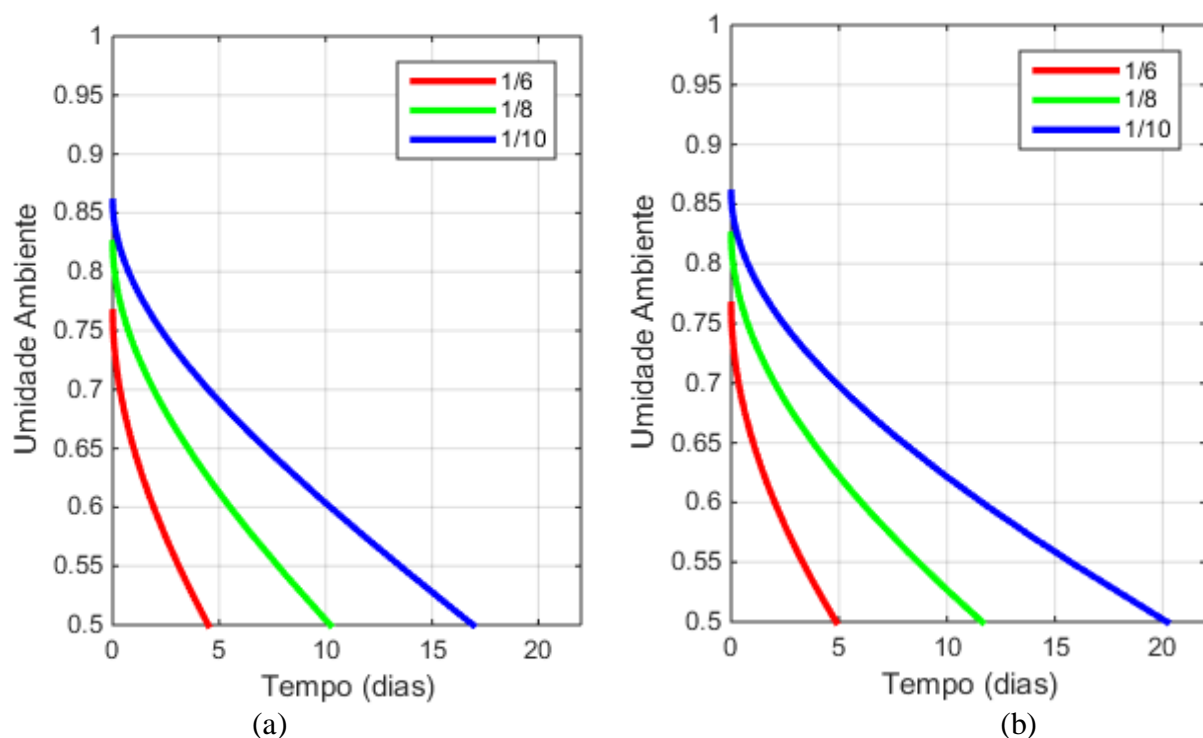


Figura 2 – Históricos ótimos de umidade ambiente em função do gradiente limite para (a) $R = 5 \text{ cm}$ e (b) $R = 7,5 \text{ cm}$.

De acordo com os gráficos da Figura 2, observam-se históricos ótimos de umidade ambiente com taxas de variação maiores nos instantes iniciais do controle, tendendo, posteriormente, a valores praticamente constantes.

Na Tabela 1, apresenta-se o resumo dos principais resultados obtidos para os

respectivos históricos ótimos da umidade ambiente.

Com base nos resultados apresentados na Tabela 1, observa-se que a umidade inicial prescrita no ambiente independe do raio do corpo de prova. Tal fato é consequência de que, satisfazendo-se à eq. (10), a umidade inicial é a que gera o gradiente espacial limite na superfície do corpo de prova. Tem-se ainda que o tempo de cura controlada aumenta com o raio do corpo de prova, assim como à medida que o gradiente espacial limite torna-se mais restritivo.

Tabela 1 – Resumo dos resultados dos históricos ótimos da umidade ambiente.

Raios	5 cm			7,5 cm		
Gradientes (cm^{-1})	1/6	1/8	1/10	1/6	1/8	1/10
Umidade Ambiente Inicial	0,766	0,824	0,859	0,766	0,824	0,859
Tempo de Cura Controlada (dias)	4,49	10,22	16,93	4,86	11,63	20,19

Uma ilustração deste processo de difusão, bem como as curvas características de umidade e gradiente espacial de umidade ao longo do corpo de prova, para alguns instantes de tempo, são apresentadas na Figura 3, ambas para o corpo de prova com $R = 5\text{ cm}$ e gradiente espacial limite de $1/10$.

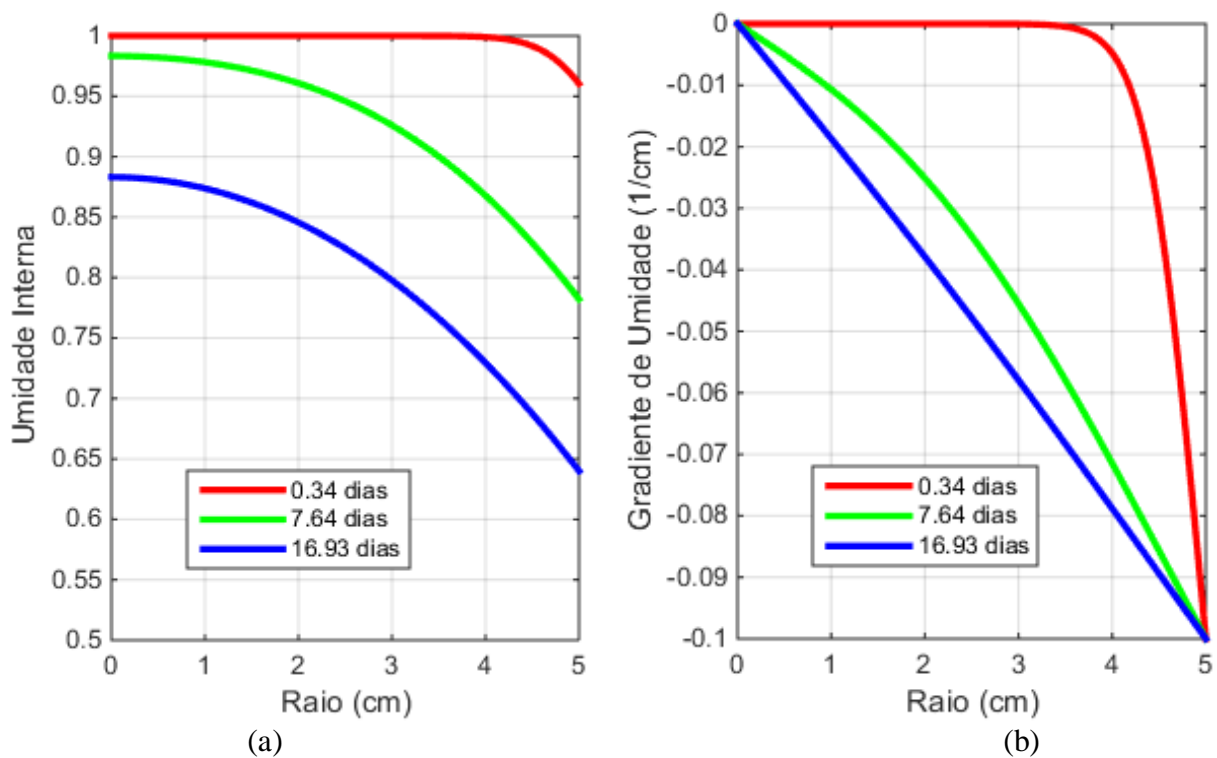


Figura 3 – (a) Umidades internas e (b) gradientes internos de umidades ao longo do corpo de prova para $R = 5\text{ cm}$ e gradiente limite de $1/10$ em alguns instantes de observação.

Os resultados apresentados na Figura 3 ilustram o fato sobre o qual o modelo de otimização proposto se baseia: os maiores gradientes, para as condições impostas na simulação, apresentam-se, sempre, na superfície do corpo de prova, não sendo superados por gradientes de umidade internos em nenhum instante de tempo.

Escolhem-se instantes próximos ao início da secagem, ao final e intermediário para cada um dos exemplos ilustrados, no intuito de apresentar as características do processo.

Nota-se a tendência da secagem de propagar-se para o interior do corpo de prova, como previsto, bem como a homogeneização da inclinação dos gradientes internos de umidade (tendendo a uma reta) à medida que o tempo avança e maiores frações do corpo de prova passam a colaborar com o fluxo de umidade prescrito.

Em geral, observa-se boa concordância entre a disposição das curvas e seus formatos com a natureza das prescrições realizadas: para raios maiores, a secagem procede de forma mais lenta, assim como quando os gradientes limite são mais restritos.

Em relação ao esforço computacional demandado para resolver a formulação proposta, observam-se tempos de simulação das otimizações, em média, menores que 0,2 s e 0,5 s para os corpos de prova com 10 cm e 15 cm, respectivamente, em um computador com as seguintes características: Windows 7 64-bits, MATLAB® R2011a, Intel® Core™ i7-2620M CPU @ 2.70 GHz 2.70 GHz e 8GB RAM.

6. CONCLUSÃO

Neste trabalho, formulou-se o problema de determinação do histórico ótimo de umidade ambiente a ser prescrito para a cura de corpos de prova cilíndricos de concreto, tomando como base o controle do gradiente espacial limite de umidade, que leva ao tempo mínimo de cura controlada.

A restrição do problema de otimização, baseada no gradiente espacial limite $\overline{\partial\phi/\partial r}$, resulta em uma complexidade matemática do histórico da umidade ambiente independente da constante de evaporação K . Essa complexidade é a mesma apresentada pela umidade na superfície externa do corpo de prova, a menos de uma defasagem vertical entre as respectivas curvas. Quanto maior essa constante de evaporação K , menor a defasagem apresentada.

A magnitude inicial da umidade ambiente controlada $\bar{\phi}_a(0)$ independe das dimensões do corpo de prova, porém o tempo de cura controlada t_{cc} é maior à medida que o corpo de prova cresce em diâmetro.

Ainda em relação ao tempo de cura controlada, esse será menor à medida que se aumenta o gradiente espacial limite. O mesmo comportamento ocorre quando se aumenta o coeficiente de difusão D do material ou quando se diminui a diferença entre a umidade inicial $\bar{\phi}_0$ do corpo de prova e a umidade final a ser atingida $\bar{\phi}_f$.

O modelo de otimização proposto, que apresenta um baixo custo computacional, foi implementado em MATLAB® e testado para as dimensões dos corpos de prova normalmente ensaiados no Brasil. Os resultados obtidos para o histórico de gradientes limites de umidade e o histórico de umidades internas comportaram-se de acordo com o esperado para a natureza da equação base escolhida para a modelagem do processo de difusão.

7. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela concessão das bolsas de Iniciação Científica (IC) e de

Produtividade em Pesquisa (PQ), respectivamente.

8. REFERÊNCIAS

- Abbasnia, R., Kanzadi, M., Zadeh, M. S., Ahmadi, J., Prediction of free shrinkage strain related to internal moisture loss, *International Journal of Civil Engineering*, **7(2)**, 92-98 (2009).
- Ali, W., Urgessa, G., Computational model for internal relative humidity distributions in concrete, *Journal of Computational Engineering*, **2014**, Article ID 539850 (2014).
- Asad, M., Baluch, M. H., Al-Amoudi, O. S. B., Al-Gadhib, A. H., Alghambi, S. A., Moisture diffusion and shrinkage in concrete repair materials, *The Fourth Saudi Engineering Conference*, **2**, 289-295 (1995).
- Associação Brasileira de Normas Técnicas, ABNT, *NBR 5738: concreto – procedimento para moldagem e cura de corpos-de-prova*, Rio de Janeiro (2003).
- Bažant, Z. P., Theory of creep and shrinkage in concrete structures: a précis of recent developments, *Mechanics Today*, **2**, 1-93, Pergamon Press (1975).
- Bažant, Z. P., Xi, Y., Drying creep of concrete: constitutive model and new experiments separating its mechanisms. *Materials and Structures*, **27(1)**, 3-14 (1994).
- Benboudjema, F., Meftah, F., Torrenti, J. M., Interaction between drying, shrinkage, creep and cracking phenomena in concrete, *Engineering Structures*, **27(2)**, 239-250 (2005).
- Castellazzi, G., Miranda, S., Formica, G., Molari, L., Ubertini, F., Coupled hygro-mechanical multiscale analysis of masonry walls, *Engineering Structures*, **84**, 266-278 (2015).
- Causon, D. M., Mingham, C. G., *Introductory finite difference methods for PDEs*, Ventus Publishing (2010).
- Jafarifar, N., Pilakoutas, K., Bennett T., Moisture transport and drying shrinkage properties of steel–fibre-reinforced-concrete, *Construction and Building Materials*, **73**, 41-50 (2014).
- Khorsandnia, N., Schänzlin, J., Valipour, H., Crews, K., Coupled finite element-finite difference formulation for long-term analysis of timber-concrete composite structures, *Engineering Structures*, **96**, 139-152 (2015).
- Mehta, P. K., Monteiro, P. J. M., *Concrete: microstructure, properties and materials 4th edition*, McGraw-Hill Professional (2013).
- Shampine, L. F., Reichelt, M. W., The MATLAB ODE suite, *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Scientific Computing*, **18(1)**, 1-22 (1997).
- Vandewalle, P., Kovacevic, J., Vetterli, M., Reproducible research in signal processing, *IEEE Signal Processing Magazine*, **26(3)**, 37-47 (2009).